

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΕΛ 76

A2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΕΛ 155

A3. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕΛ 216

A4. α)Σ

β)Σ

γ)Λ

δ)Λ

ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_g = (1, +\infty)$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$D_f = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$$

$$r(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$$

B2. $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, άρα είναι 1-1.

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

Άρα, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $D_{f^{-1}} = f((1, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (1, +\infty)$, άρα $f(x) = f^{-1}(x)$.

B3. $r(x) = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow r(x) - x = -\frac{1}{x}$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$,

άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

B4. $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = 4$ δεκτή

ή $x = \pm 1$ απορρίπτονται

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως πολυωνυμική, πρέπει να είναι συνεχής και στο 2.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = e^\lambda$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + \lambda = f(2)$ πρέπει $e^\lambda = \lambda + 1$. Από γνωστή ανισωτική σχέση ισχύει μόνον για $\lambda = 0$. Άρα, $\lambda = 0$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2)$ και $f'(x) = -2 < 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ και $f'(x) = -2x + 4 = -2(x-2) < 0$. Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε

$x \in [0, 2) \cup (2, +\infty)$ και η f συνεχής στο 2, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο το $f(0)=5$.

Γ3. i. Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2) \cup (2, 3)$. Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -2$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$ επειδή $-2 \neq 0$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2, άρα δεν ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στο $[0, 3]$.

ii. $\lambda_{\Delta E} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = -\frac{5}{3}$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ και $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$.

Αν $x \in (0, 2)$, $f'(x) = -2 \neq -\frac{5}{3}$

Αν $x \in (2, 3)$, $f'(x) = -2x + 4$, άρα $-2x + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6} \in (2, 3)$, άρα $\xi = \frac{17}{6}$.

Γ4. Για $x=2$ έχουμε $f(2)=1$, άρα τη χρονική στιγμή t_0 , $y(t_0)=1$. Το $M(x(t), y(t))$ εφ($\omega(t)$) = $\frac{y(t)}{2}$. Από την παραγωγίσιμη της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$(1 + \varepsilon \varphi^2 \omega(t)) \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \quad (1)$$

Για $t=t_0$, $\varepsilon \varphi(\omega(t_0)) = \frac{1}{2}$.

Από τη σχέση (1) για $t=t_0$ έχουμε: $(1 + \frac{1}{4}) \omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5} \text{ rad/s}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{\ln x}{x} + a) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{\ln x}{x} + a) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x		e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	$\frac{1}{e} + a$	\searrow

μέγιστο
 $\frac{1}{e} + a$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$, άρα το $f((0, e]) = (-\infty, \frac{1}{e} + a]$.

Αντίστοιχα, $f([e, +\infty)) = (0, \frac{1}{e} + a]$

Τελικά $f((0, +\infty]) = (-\infty, \frac{1}{e} + a]$. Πρέπει: $\frac{1}{e} + a = \frac{1}{e} + 1 \Rightarrow a = 1$.

$$\Delta 2. \text{ Το } 0 \notin \left(0, 1 + \frac{1}{e}\right]$$

άρα η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $[e, +\infty)$. Το $0 \in$ στο $\left(-\infty, \frac{1}{e} + a\right]$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα στο $(0, e]$ μοναδική, επειδή είναι γνησίως αύξουσα. $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ και $f(1) > 0$, άρα από θεώρημα Bolzano η ρίζα περιέχεται στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \subseteq (0, e)$.

$$\Delta 3. \text{ i. } f(4) = \frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{2(\ln 2 + 2)}{4} = \frac{(\ln 2 + 2)}{2}$$

$f(2) = \frac{\ln 2 + 2}{2}$, άρα $f(2)=f(4)$, δηλαδή, $2 \in (0, e)$ και είναι ρίζα της εξίσωσης μοναδική στο $(0, e)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, $f(4) = f(2)$, άρα το $4 \in [e, +\infty)$, τελικά έχει δύο ακριβώς ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

$$\text{ii. } 2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(2)$$

Αν $x \in (0, e]$, τότε $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x \geq 2$, άρα το $x \in [2, e]$.

Αν $x \in [e, +\infty)$, τότε $f(x) \geq f(4) \Leftrightarrow x \leq 4$, άρα το $x \in [e, 4]$. Τελικά, $x \in [2, 4]$.

$$\Delta 4. E = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx \quad (1)$$

$$\text{Θέτω } u = e^x \Leftrightarrow du = e^x dx \Leftrightarrow du = u dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\text{Για } x = -\ln 2, u = \frac{1}{2}$$

$$\text{Για } x = 0, u = 1.$$

$$\text{Άρα από (1) : } E = \int_{1/2}^1 \left| f(u) \cdot \frac{1 - \ln u}{u^2} \right| du = \int_{1/2}^1 |f(u) \cdot f'(u)| du$$

$f'(u) > 0$ για κάθε $u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και για $u < \rho \Rightarrow f(u) < f(\rho) \Rightarrow f(u) < 0$, ενώ για $u > \rho$

$\Rightarrow f(u) > f(\rho) \Rightarrow f(u) > 0$, άρα

$$E = - \int_{1/2}^{\rho} f(u) \cdot f'(u) du + \int_{\rho}^1 f(u) \cdot f'(u) du = (2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1) \tau. \mu$$

Επιμέλεια
Ανδρέου Α. – Ζαντιώτη Ε. – Καρτσώνη Κ.