ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα (σελ. 133 σχολ.Βιβλίου)
Α2. Σελ. 51 σχολ. Βιβλίου
Α3. Σελ.185 σχολ. Βιβλίου
Α4. **α)** Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ)Σωστό
ε)Λάθος

Θέμα Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της $h = fog$ θα είναι:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,/ g(x) \in D_f\} = \{x \ge 2 \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 > 1\} =$$
$$=\{x \ge 2 \text{ και } \sqrt{x-2} > 0\} = \{x \ge 2 \text{ και } x > 2\} = (2, +\infty)$$

Ο τύπος της $h = fog$ ειναι:

$h(x) = f(g(x)) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2\ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$,
για κάθε $x \in (2, +\infty)$

Β2. Η h παραγωγίσιμη με $h'(x) = \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0$, για κάθε x>2
Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα , συνεπώς είναι 1-1 δηλαδή αντιστρέφεται.
Το σύνολο τιμών της h θα είναι :

$$h[(2, +\infty)] = (\lim_{x \to 2^+} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x)) = (-\infty, +\infty)$$

διότι:$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \ln(x-2) \xrightarrow{u=x-2} \lim_{u \to 0} lnu = -\infty$ και
$\lim_{x \to +\infty} \ln(x-2) = +\infty$
Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} με πεδιο ορισμου το σύνολο τιμων της h και τύπο $h^{-1}(x) = e^x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που βρίσκουμε ως εξής:

$$y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x - 2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Β3. $lim_{x \to 2}\left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2}\right) = lim_{x \to 2}\left(ln\,(x-2) \cdot \frac{2ln\,(x-1)}{x-2}\right) =$
$=lim_{x \to 2}\, ln\,(x-2) \cdot lim_{x \to 2} \frac{2ln\,(x-1)}{x-2} = -\infty \cdot 2 = -\infty$
Διότι:

$$lim_{x \to 2}\, ln(x-2) \xrightarrow{u=x-2} lim_{u \to 0}\, lnu = -\infty \quad \text{και} \quad lim_{x \to 2} \frac{2ln(x-1)}{x-2} \xrightarrow{\frac{0}{0}, DLH} lim_{x \to 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = \dfrac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Αφού έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\ell\text{im}_{x \to +\infty}$ f(x) $\ell \in \mathbb{R}$.
- Για κ $\neq 0$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\kappa \cdot x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \kappa \cdot x$
  Αν κ>0 τότε το όριο ισούται με $+\infty$.
  Αν κ<0 τότε το όριο ισούται με -∞.

Αν κ=0 τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu\cdot x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu}{x} = 0$

Άρα πρέπει κ=0.

Η ευθεία y=x εφάπτεται στην f στο 0 (0,0) άρα f(0)=0 και f′(0)=1

$$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2+1}\right)' = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\mu\cdot x^2 + \mu - 2\mu x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{\mu x^2 + \mu}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$ οπότε $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Γ2. **i.** Για κ=ο και μ=1: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

f′(x)=0 $\Leftrightarrow$ x=±1

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f(x)	-	+	-	
f′(x)	↘	↗	↘	
		Τ.Ε	Τ.Μ	

$f(-1) = -\frac{1}{2}$ και $f(1) = \frac{1}{2}$

ii. $A_1 = (-\infty,-1) \underset{\sigma/\chi\eta\varsigma}{\overset{f\downarrow}{\rightarrow}} \left[f(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

$A_2 = (-1,1] \underset{\sigma/\chi\eta\varsigma}{\overset{f\uparrow}{\rightarrow}} (\lim\limits_{x\to-1^+} f(x), f(+1)] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$A_3 = (1,+\infty) \underset{\sigma/\chi\eta\varsigma}{\overset{f\downarrow}{\rightarrow}} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+1^+} f(x)\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

f(A)=$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

iii. f(x)=$\frac{1}{2} + \alpha^2$

$\alpha^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 \ge \frac{1}{2}$ άρα η εξίσωση έχει ρίζα μόνο για α=0 το x=1

Γ3. i. $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+2+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cdot\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}dx =$

$$=\int_0^1 x^{2v+1}dx=\left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2}\right]_0^1=\frac{1}{2v+2}$$

Γ3. ii.

Για v=0

$$I_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\ell n\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{\ell n2}{2}\quad \textbf{(1)}$$

από (i) Για v=0 έχουμε:

$$I_0+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{2}-I_0\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$I_1=\frac{1}{2}-\frac{\ell n2}{2}\quad \textbf{(2)}$$

Επίσης για v=1 στην (1)

$$I_1+I_2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{4}-I_1\overset{(2)}{=}$$

$$I_2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\ell n2}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\ell n2}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{\ell n2}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έστω $h(x)=g(x)+x$

Η h συνεχής στο [-1,0] ως παραγωγίσιμη

$h(-1)=g(-1)-1<0$

$h(0)=g(0)>0$

Άρα από θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0 \Leftrightarrow g(x_1)+x_1=0$

Έστω ότι υπάρχει και $x_2\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_2)=0$

Η h συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως παραγωγίσιμη

και $h(x_1)=h(x_2)=0$ άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$:$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(\xi)=-1$ άτοπο

Δ2.

Εφόσον η f παραγωγίσιμη θα ισχύει : $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}(x^2(g(x)+x))=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{x}-\kappa\right)=3-\kappa$$

Άρα $3-\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=3$

Δ3.

i) $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2ημx + εφx - 3x \geq 0$

$f'(x)=2\,συνx+\frac{1}{συν^2x}-3=\frac{(συνx-1)^2(2συνx-1)}{συν^2x}>0$ για $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2})$ άρα $x\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$

ii) $f(x)=\frac{\pi}{3}$

$f([0,\frac{\pi}{2}))=[f(0)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x))=[0,+\infty)$ άρα $\frac{\pi}{3}\in f([0,\frac{\pi}{2}))$ άρα υπάρχει $x_2\in(0,\frac{\pi}{2}]$: $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$.Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2})$ είναι μοναδικό

Δ4.

i) Στο $[x_1,0)$ $f(x)=x^2(g(x)+x)$

Η $h(x)=g(x)+x$ είναι συνεχής στο $[x_1,0]$ και $h(x)\neq 0$ στο $(x_1,0)$ αφού η μοναδική της ρίζα είναι το x_1 από Δ1

Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο $(x_1,0]$.Εφόσον $h(0)=g(0)>0$ τότε η $h(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,0]$ άρα $f(x)\geq 0$ κάθε $x\in[x_1,0]$ με την ισότητα να ισχύει στο $x=0$

ii) C_f, xx' , $x=x_1<0$, $x=f(x_2)=\frac{\pi}{3}$

$$E(\Omega)=\int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}}|f(x)|dx \overset{f(x)\geq 0}{=} \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

$$E(\Omega_1)=\int_{x_1}^{0} f(x)dx$$

$$E(\Omega_2)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

$$E(\Omega_2)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2ημx+εφx-3x)dx=$$

$$=\left[-2συνx-\ell n(συνx)-3\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\cancel{-2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}-\ell n\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi^2}{6}+2+\ell n1=-1+\ell n2-\frac{\pi^2}{6}+2=1+\ell n2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$E(\Omega_1)=E(\Omega_2)\Rightarrow\int_{x_1}^{0}x^2\left(g(x)+x\right)dx=1+\ell n2-\frac{\pi^2}{6}\quad \mathbf{(1)}$$

$$=\int_{x1}^{0}(x^2g(x)+x^3)dx=\int_{x1}^{0}x^2g(x)dx+\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x1}^{0}$$

$$= \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)dx - \frac{x_1^{\,4}}{4} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x1}^{0} - \int_{x1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)dx - \frac{x_1^{\,4}}{4} = \frac{x_1^{\,4}}{4} - \frac{1}{3}\int_{x1}^{0} x^3 g'(x)dx$$

$$\textbf{(1)} \Rightarrow \frac{x_1^{\,4}}{12} - \frac{1}{3}\int_{x1}^{0} x^3 g'(x)dx = 1 + \ell n2 - \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \frac{x_1^{\,4}}{12} - 1 - \ell n2 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3}\int_{x1}^{0} x^3 g'(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^{\,4}}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ell n2 - 3$$

Επιμέλεια

Ανδρέας Ανδρέου - Κατερίνα Καρτσώνη - Έφη Ζαντιώτη- Αγγελική Τερζόγλου

Τα θέματα Μαθηματικών Προσανατολισμού στις Πανελλαδικές εξετάσεις ΓΕΛ 2026 χαρακτηρίζονται στο σύνολό τους ως μέτριας δυσκολίας.
Τα θέματα δεν έχουν ‘παγίδες’, καλύπτουν το φάσμα της διδακτέας ύλης, έχουν υποερωτήματα που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, καθώς και ερωτήματα που απαιτούν προσοχή στις πράξεις.
Ο βαθμός δυσκολίας κλιμακώνεται – όπως είναι αναμενόμενο- από το Α προς το Δ θέμα , με το θέμα Δ4 να απαιτεί πολύ καλή προετοιμασία και γνώσεις στο πεδίο των ολοκληρωμάτων.
Η επίλυση των θεμάτων στον δεδομένο χρόνο δεν αναμένεται να δυσκολέψει τους καλά προετοιμασμένους υποψηφίους.