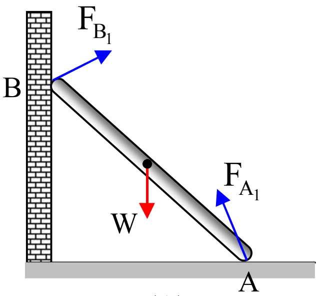
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ερώτηση 1η

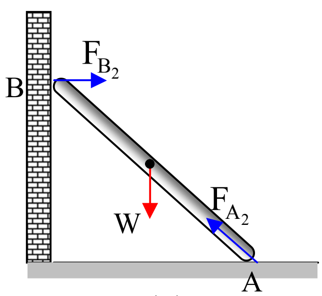
A_1. Μια ομογενής λεπτή δοκός ΑΒ ισορροπεί καθώς βρίσκεται σε επαφή με τον τοίχο και το δάπεδο του σχήματος. Οι αντιδράσεις του δαπέδου και του τοίχου μπορεί να είναι, όπως στο σχήμα :

α. (Α) **β.** (Β) **γ.** (Γ)

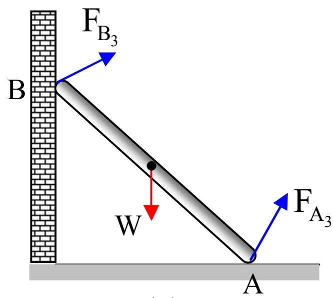
A_2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(A)



(B)

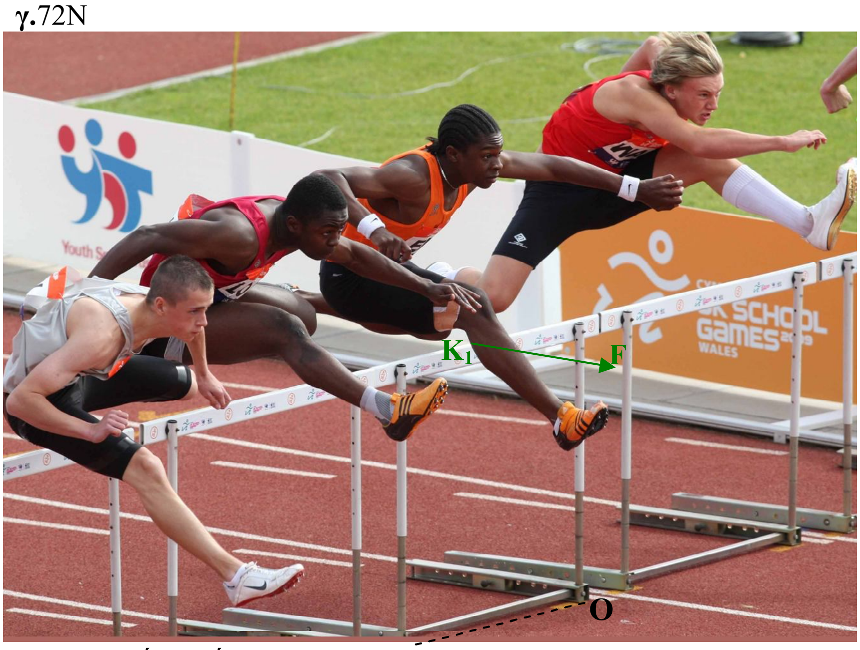


(Γ)

Ερώτηση 2η

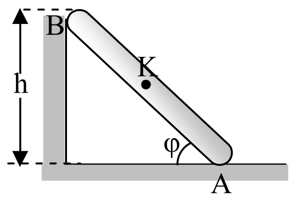
B_1. Στο δρόμο των 110m μετ΄ εμποδίων οι κανονισμοί προβλέπουν το ύψος του εμποδίου να είναι h=1,06m.Τα οριζόντια πέλματα-αντίβαρα έχουν ρυθμιστεί έτσι ώστε, τα βάρη τους W=W΄=31,8N να ασκούνται σε απόσταση r=0,6m από τα σημεία Ο και Ο΄ αντίστοιχα .Το μέτρο της οριζόντιας δύναμης F που πρέπει να ασκηθεί από έναν αθλητή στο μέσο K_1 του πάνω άκρου της οριζόντιας δοκού του εμποδίου, η οποία όπως και τα υπόλοιπα τμήματα του εμποδίου θεωρείται ομογενής, ώστε αυτό να ανατραπεί , χωρίς να ολισθήσει, πρέπει να είναι μεγαλύτερο από:

α.18N **β.**36N **γ.**72N



B_2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 3η



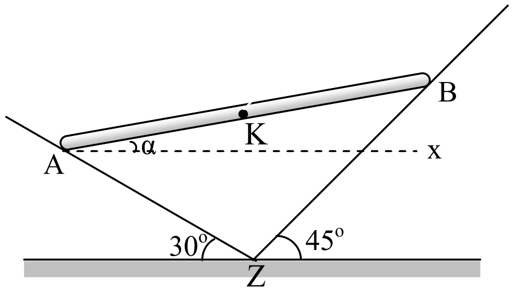
$Γ_1$. Η ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΒ μήκους L =1m μόλις ισορροπεί με το άκρο της Α σε επαφή με το λείο οριζόντιο δάπεδο και το άκρο της Β σε επαφή με το άκρο υποστηρίγματος ύψους h=0,5 m.Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ υποστηρίγματος, $\mu_{στ,ορ}$ και ράβδου είναι :

α. $\sqrt{3}$ **β.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **γ.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$Γ_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση $4^{η}$

$Δ_1$. Η ομογενής και ισοπαχής δοκός ΑΒ ισορροπεί στηριζόμενη στα λεία κεκλιμένα επίπεδα του σχήματος γωνιών κλίσης $\hat{φ} = 30^o$ και $\hat{θ} = 45^\circ$ ως προς το οριζόντιο έδαφος . Για τη γωνία (κλίση) $\hat{α}$ ($\hat{α} \neq 0$) που σχηματίζει η δοκός με την οριζόντια που διέρχεται από το Α , ισχύει:



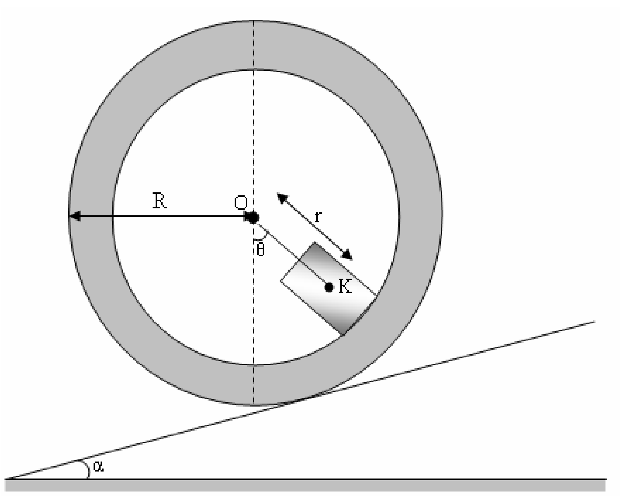
α. $σφ\hat{α} = \sqrt{3} - 1$ **β.** $εφ\hat{α} = \sqrt{3} + 1$ **γ.** $σφ\hat{α} = \sqrt{3} + 1$

$Δ_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Να θεωρήσετε γνωστές όποιες από τις επόμενες τριγωνομετρικές ταυτότητες χρειαστείτε.
ημ(α+β)=ημασυνβ + ημβσυνα, ημ(α-β)=ημασυνβ – ημβσυνα , συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ, συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ.

Ερώτηση $5^{η}$

$Ε_1$. Σε ομογενή δακτύλιο μάζας m =0,5Kg και εξωτερικής ακτίνας R=0,4m έχει τοποθετεί σώμα μάζας m_0 =2Kg . Το κέντρο μάζας Κ του σώματος απέχει από το κέντρο μάζας Ο του δακτύλιου απόσταση r=0,2m. Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\hat{α}$, με ημ$\hat{α}$ =0,2 με τη επίδραση δυνάμεων που θεωρούνται ομοεπίπεδες και σε θέση όπου η ακτίνα του δακτύλιου που αντιστοιχεί στο κέντρο μάζας του σώματος Κ ,σχηματίζει με την κατακόρυφη που διέρχεται από το κέντρο του δακτύλιου Ο , γωνία $\hat{θ}$ ίση με :

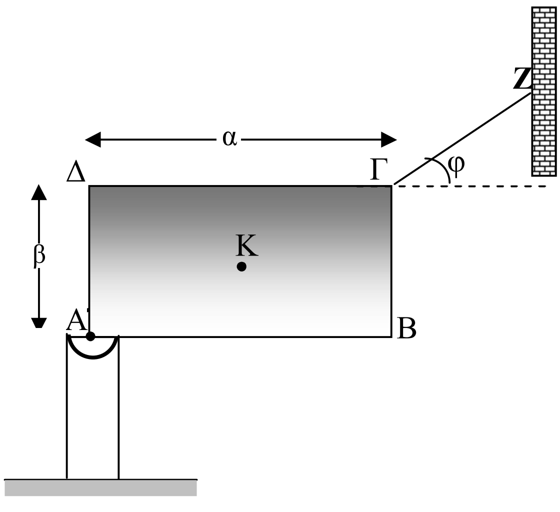


α. 30^o **β.** 45^o **γ.** 60^o

$Ε_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση $6^{η}$

$Στ_1$. Η ομογενής και αμελητέου πάχους πινακίδα βάρους W και σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, έχει διαστάσεις α και β με α=2β. Η γωνία Α της πινακίδας έχει συνδεθεί με άρθρωση, ενώ η γωνία της Γ συνδέεται με το ακλόνητο σημείο Ζ μέσω νήματος ΓΖ το οποίο σχηματίζει με την οριζόντια που διέρχεται από το Γ γωνία $\hat{φ}$ με 0< $\hat{φ}$ <90^o . Όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στην πινακίδα θεωρούνται ομοεπίπεδες. Το όριο θραύσης του νήματος έχει τιμή που επιτρέπει να υπάρχουν τιμές της γωνίας $\hat{φ}$ για τις οποίες η πινακίδα ισορροπεί, αρκεί για τη γωνία $\hat{φ}$ να ισχύει:



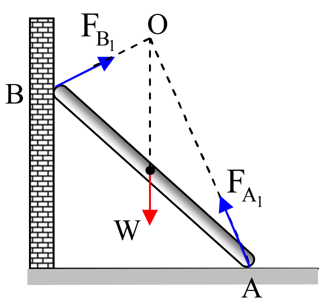
α. $εφ\hat{φ} > \frac{1}{2}$ **β.** $εφ\hat{φ} < 2$ **γ.** $εφ\hat{φ} > 2$

$Στ_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$Α_1$. α

$Α_2$. Η δοκός ισορροπεί υπό την επίδραση τριών μη παράλληλων δυνάμεων, του βάρους W , της δύναμης από το δάπεδο $F_Α$ και της δύναμης από τον τοίχο $F_Β$, επομένως πρέπει οι φορείς τους να διέρχονται από το ίδιο σημείο.
Αυτό συμβαίνει μόνο στο σχήμα (Α), όπου οι φορείς των τριών δυνάμεων διέρχονται από το σημείο Ο.



Β1. **β**

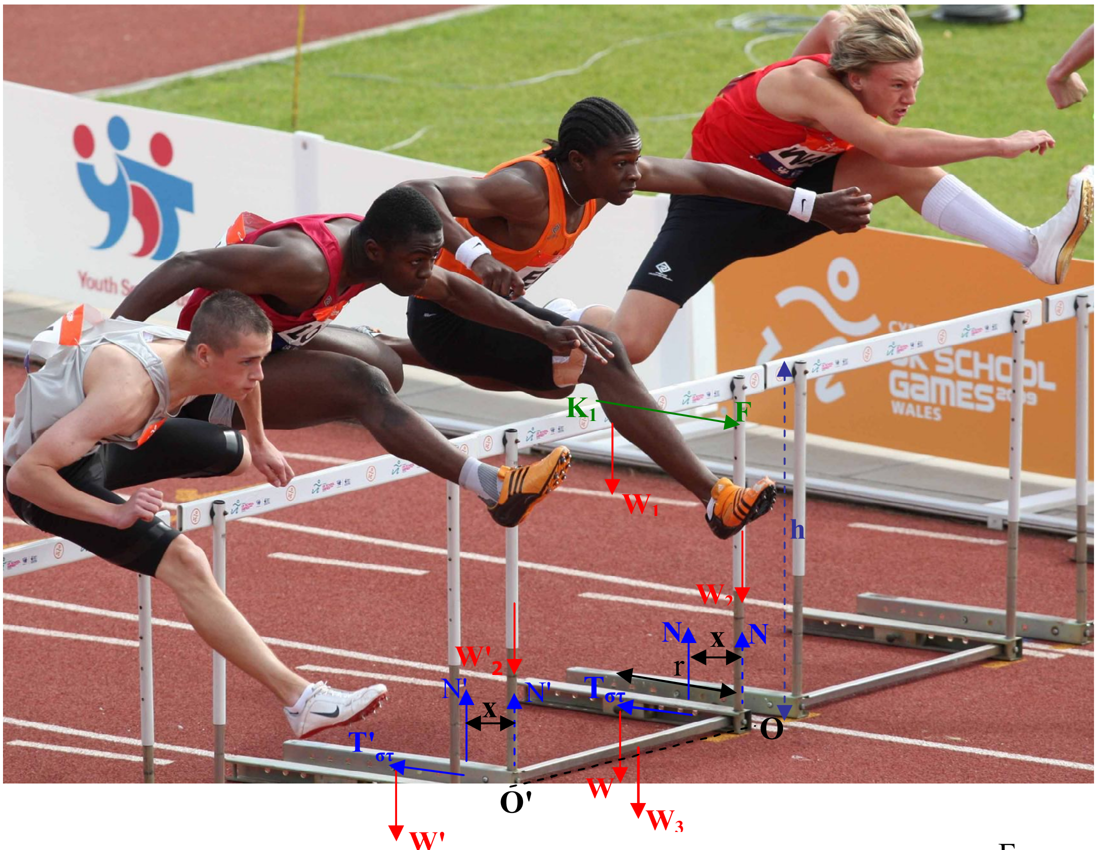
Β2. Στο εμπόδιο ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις του βάρους του πάνω οριζόντιου τμήματος W_1, τα βάρη των κατακόρυφων τμημάτων W_2 και W_2', τα βάρη των αντίβαρων W και W', το βάρος του κάτω οριζόντιου τμήματος (το οποίο δεν εφάπτεται στο στίβο) W_3, οι κάθετες αντιδράσεις N και N' από το στίβο, οι δυνάμεις στατικής τριβής $T_{στ}$ και $T'_{στ}$ και η οριζόντια δύναμη F που ασκεί ο αθλητής με τη λανθασμένη υπερπήδηση του εμποδίου. Από τις συνθήκες ισορροπίας του εμποδίου έχουμε: $ΣF_y=0$:

$$N + N' = W_1 + 2W_2 + 2W + W_3 \overset{N=N'}{\Rightarrow} N = N' = \frac{W_1}{2} + W_2 + W + \frac{W_3}{2} \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι όταν το εμπόδιο ισορροπεί, τα μέτρα των δυνάμεων $N=N'$ παραμένουν σταθερά και ανεξάρτητα από την τιμή της οριζόντιας δύναμης F που τυχόν ασκεί ο αθλητής στο εμπόδιο.
Από τη συνθήκη $Στ_{(\text{ως προς τον άξονα } OO')} = 0$, αν θεωρήσουμε θετικές τις ροπές που στρέφουν αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού:

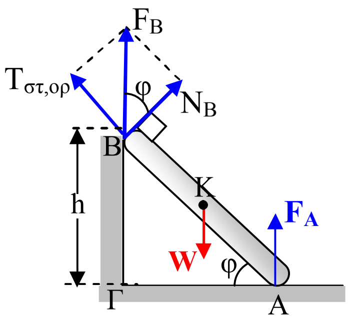
$$-F\,h - N\,x - N'\,x + W\,r + W'\,r = 0 \underset{N=N'}{\overset{W=W'}{\Rightarrow}} F\,h + 2\,N\,x = 2\,W\,r$$ από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι όσο αυξάνεται το μέτρο της F πρέπει να ελαττώνεται ο μοχλοβραχίονας x των N και N' προκειμένου το εμπόδιο να παραμένει σε ισορροπία, αφού τα μέτρα των N και N' παραμένουν σταθερά.
Η ανατροπή του εμποδίου αρχίζει όταν οι N και N' ασκούνται στα σημεία Ο και O', δηλαδή οι μοχλοβραχίονες τους μηδενίζονται, x=0 και $Στ_{(\text{ως προς τον άξονα } OO')} < 0 \Rightarrow -F\,h + 2\,W\,r < 0 \Rightarrow F\,h > 2\,W\,r \Rightarrow$

$$F > \frac{2Wr}{h} \Rightarrow F > \frac{2 \cdot 31{,}8 \cdot 0{,}6}{1{,}06} \Rightarrow F > 36N.$$



Γ1. **γ**

Γ2. Η ισορροπία της ράβδου επιβάλλει και η αντίδραση $\vec{F}_B$ του υποστηρίγματος στη ράβδο να είναι κατακόρυφη, διότι σε άλλη περίπτωση κατά την οριζόντια διεύθυνση $ΣF_x \neq 0$.
Η ράβδος μόλις ισορροπεί, δηλαδή ισορροπεί οριακά , άρα η στατική τριβή που δέχεται από το υποστήριγμα είναι η οριακή στατική τριβή, $T_{στ,ορ}$ για την οποία ισχύει $T_{στ,ορ} = μ_{στ.ορ}\,N_B$ (1)



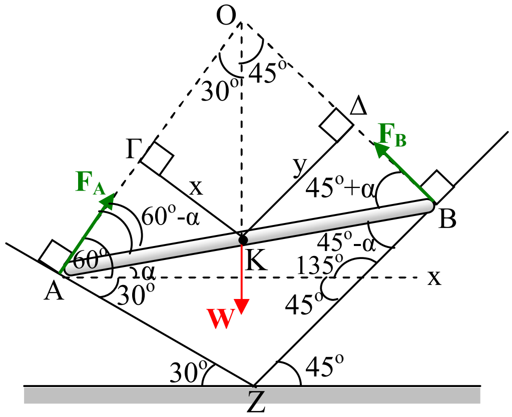
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma A}$: $\eta\mu\hat{\varphi}=\frac{h}{L} \Rightarrow \eta\mu\hat{\varphi}=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\varphi}=30°$.Η γωνία μεταξύ των $\vec{F}_B$ και $\vec{T}_{\sigma\tau,o\rho}$ είναι ίση με $\hat{\varphi}$, διότι οι πλευρές τους είναι κάθετες.

Άρα , $\varepsilon\varphi 30° = \frac{T_{\sigma\tau,o\rho}}{N_B} \Rightarrow T_{\sigma\tau,o\rho} = N_B\ \varepsilon\varphi 30°$ (2). Από (1) και (2) : $\mu_{\sigma\tau.o\rho}= \varepsilon\varphi 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Δ_1. γ

Δ_2. Η δοκός ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους W και των κάθετων αντιδράσεων F_A και F_B από τα κεκλιμένα επίπεδα. Θεωρούμε θετικές τις ροπές που στρέφουν αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ως προς το κέντρο μάζας Κ που βρίσκεται στο μέσο της ομογενούς δοκού και από τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma\tau_{(K)}=0$, έχουμε : $-F_A\, x + F_B\, y=0$ (1).

Οι γωνίες $A\hat{O}K = \hat{\varphi} = 30°$ και $K\hat{O}B = \hat{\theta} = 45°$ (έχουν τις πλευρές τους κάθετες με αυτές των γωνιών των κεκλιμένων επιπέδων).



Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{O\Gamma K}$ και $\overset{\Delta}{O\Delta K}$ αντίστοιχα

x= (OK)ημ30^o και y= (OK)ημ45° :

Από την (1) :- F_A(OA)ημ30^o + F_B(OA)ημ45° =0$\Rightarrow$

$F_A= F_B\sqrt{2}$ (2)

Η γωνία $Z\hat{A}X = \hat{\varphi} = 30°$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων), άρα $O\hat{A}X = 60°$ και $O\hat{A}K = 60° - \hat{\alpha}$, τέλος από το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AOB}$: $60° - \hat{\alpha} + 30° + 45° + O\hat{B}K = 180° \Rightarrow O\hat{B}K = 45° + \hat{\alpha}$.

Υπολογίζουμε εκ νέου τους μοχλοβραχίονες x και y από τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{K\Gamma A}$ και $\overset{\Delta}{K\Delta B}$ προκειμένου να εισάγουμε την γωνία $\hat{\alpha}$ στους υπολογισμούς μας και αντίστοιχα έχουμε ,

x= (AK)ημ(60^0- α) (3) , y= (BK)ημ(45^0 +α) (4).

Από (1) $\overset{(2)}{\underset{(3),(4)}{\Rightarrow}}$ $- F_B\sqrt{2}$ (AK) ημ(60^0- α) + F_B(BK) ημ(45^0 + α)=0 $\overset{(AK)=(BK)}{\Rightarrow}$

$$\sqrt{2}\ \eta\mu(60^0\text{- }\alpha)= \eta\mu(45^0 + \alpha) \Rightarrow \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{1}{2}\eta\mu\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha \Rightarrow (\frac{\sqrt{3}-1}{2})\ \sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu\alpha$$

$$\overset{\eta\mu\alpha\neq 0}{\Rightarrow}\ \sigma\varphi\alpha=(\frac{2}{\sqrt{3}-1}) \Rightarrow \sigma\varphi\alpha = \sqrt{3}+1$$

Παρατήρηση:
Αν κάποιος ήθελε να αποφύγει την ασυνήθιστη χρήση της ίδιας σχέσης ($\Sigma\tau_{(K)}=0$) δύο φορές, θα έπρεπε να καταφύγει σε μία καθαρά γεωμετρική – τριγωνομετρική διαδικασία, όπου από το πουθενά θα έπρεπε να αποφασίσει να εκφράσει το λόγο $\frac{x}{y}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους.

E_1. α

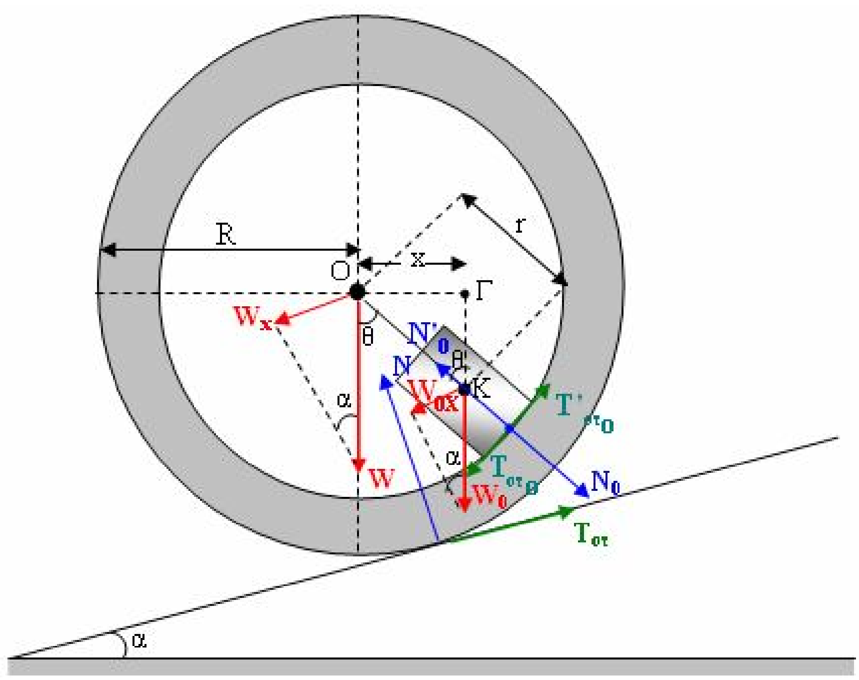
E_2. Στο σύστημα ομογενής δακτύλιος – σώμα ασκούνται το βάρος W του δακτυλίου, το βάρος W_0 του σώματος, η στατική τριβή από το κεκλιμένο επίπεδο στο δακτύλιο $T_{\sigma\tau}$, η κάθετη αντίδραση του κεκλιμένου επιπέδου N και οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος που έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης, $T_{\sigma\tau_0}$ και $T'_{\sigma\tau_0}$ από την εσωτερική επιφάνεια του δακτυλίου στο σώμα και από το σώμα στο δακτύλιο αντίστοιχα και οι κάθετες αντιδράσεις N_0 και N'_0 από το δακτύλιο στο σώμα και από το σώμα στο δακτύλιο αντίστοιχα.
Από την ισορροπία του συστήματος ομογενής δακτύλιος – σώμα και θεωρώντας ως θετικές τις ροπές που στρέφουν αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau}R - W_0 x = 0$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{O\Gamma K}$:
x=r ημθ, άρα $T_{\sigma\tau}R = m_0 g\, r\, \eta\mu\theta$ (1).
Αντίστοιχα για τις δυνάμεις που επιδρούν στο σύστημα κατά τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε:

$$\Sigma F_{(\text{στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου})} = 0 \Rightarrow$$

$W_x + W_{0x} - T_{\sigma\tau} = 0$.Οι γωνίες μεταξύ των W και W_x, W_0 και W_{0x} είναι ίσες με $\hat{\alpha}$, διότι έχουν πλευρές κάθετες με αυτές της γωνίας του κεκλιμένου επιπέδου.



$$mg\eta\mu\alpha + m_0 g\eta\mu\alpha - T_{\sigma\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\sigma\tau} = (m + m_0)g\eta\mu\alpha \quad (2).$$

Από (1) και (2):

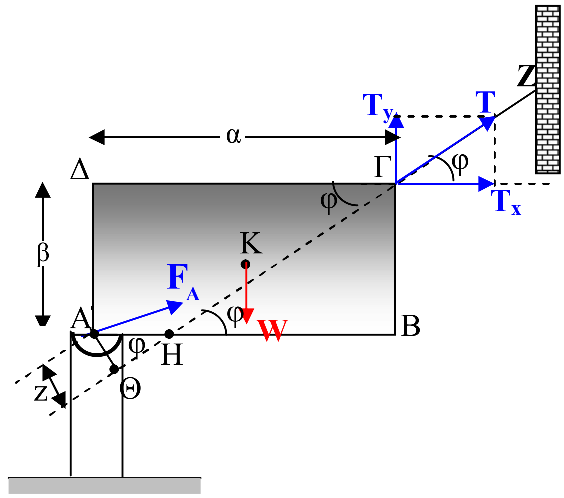
$$R(m + m_0)g\,\eta\mu\alpha = m_0 g\, r\, \eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$\eta\mu\theta = \left(\frac{m + m_0}{m_0}\right)\frac{R}{r}\eta\mu\alpha \Rightarrow \eta\mu\theta = \left(1 + \frac{m_0}{m_0}\right)\frac{R}{r}\eta\mu\alpha .$$

Με αριθμητική αντικατάσταση $\eta\mu\theta = \left(1+\frac{0,5}{2}\right)\frac{0,4}{0,2}0,2 \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\theta} = 30^o$.

$Στ_1$. γ

$Στ_2$. Στην ομογενή πινακίδα ασκούνται η δύναμη του βάρους W, η δύναμη από την άρθρωση στο Α, F_A και η δύναμη από το νήμα στο Γ, Τ.
Θεωρώντας θετικές τις ροπές που στρέφουν αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού από την ισορροπία της ράβδου θα έχουμε:



1ος τρόπος
Αναλύουμε τη δύναμη Τ στην οριζόντια συνιστώσα της T_x και στην κατακόρυφη συνιστώσα της T_y:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow -W\frac{\alpha}{2} - T_x\beta + T_y\alpha = 0 \overset{\alpha=2\beta}{\Rightarrow} -W\frac{\alpha}{2} - T_x 2\alpha + T_y\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$-W\frac{\alpha}{2} - T\cdot 2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi + T\cdot\eta\mu\varphi\cdot\alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{W}{2(\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi)} \quad (1).$$

2ος τρόπος

Αν z =(ΑΘ)= ο μοχλοβραχίονος της δύναμης Τ ως προς το Α, τότε $\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow -W\frac{\alpha}{2} + Tz = 0$ (1α).

Η γωνία $\hat{\varphi}$ μεταφέρεται στο Η (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων) και ως κατά κορυφήν στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{A\Theta H}$, από το οποίο έχουμε z=(AH)ημφ (2α).

Όμως, (ΑΗ)=(ΑΒ)-(ΗΒ)=α-(ΗΒ) . Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{H B \Gamma}}$: (ΗΒ)=$\dfrac{\beta}{\varepsilon\varphi\varphi}$. Άρα (ΑΗ)=α-$\dfrac{\beta}{\varepsilon\varphi\varphi} \overset{\alpha=2\beta}{\Rightarrow}$

(ΑΗ)=α-$\dfrac{2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}$ (3α). Από (2α) και (3α) : z=(α -$\dfrac{2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}$) ημφ $\Rightarrow$ z =αημφ-2ασυνφ (4α).

Από (1α) και (4α): $-W\dfrac{\alpha}{2} + T(\alpha\eta\mu\varphi - 2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi) = 0 \Rightarrow T = \dfrac{W}{2(\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi)}$ (1).

Ποιόν τρόπο προτιμάτε;

Επειδή η δύναμη από το νήμα μπορεί μόνο να έλκει την πινακίδα, T > 0 από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $(\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi) > 0 \overset{\sigma\upsilon\nu\varphi\neq 0}{\Rightarrow} \varepsilon\varphi\varphi > 2$.

Παρατήρηση:

Από τη διερεύνηση της σχέσης (1) προκύπτει ότι όταν εφφ=2, η $T \to \infty$, δηλαδή πρακτικά το νήμα σπάει. Αντίστοιχα όταν εφφ < 2 ,η $T < 0$ και η πινακίδα δεν μπορεί να ισορροπεί συνδεδεμένη με νήμα με το σημείο Ζ, διότι η δύναμη από νήμα μπορεί μόνο να έλκει και όχι να ωθεί. Σε αυτή την περίπτωση η ισορροπία της πινακίδας θα μπορούσε να επιτευχθεί, αν στη θέση του νήματος ΓΖ τοποθετούσαμε άκαμπτη ράβδο συνδεδεμένη με την πινακίδα , η οποία θα ωθούσε προς τα αριστερά.

Ξ. Στεργιάδης